Ciencia y Educación
(L-ISSN: 2790-8402 E-ISSN: 2707-3378)
Edición Especial
2024

LA APLICACIÓN DE TÉCNICAS ALGEBRAICAS EN LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES

THE APPLICATION OF ALGEBRAIC TECHNIQUES IN THE RESOLUTION OF SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS

Autores: [1]Gustavo David Robalino Múñiz y [2]Viviana Beatriz González Barona.
[1]ORCID ID: https://orcid.org/0009-0007-3538-7291
[2]ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-0509-3280
[1]E-mail de contacto: grobalinom@unemi.edu.ec
[2]E-mail de contacto: vbarona@unemi.edu.ec
Afiliación[1]* [2]*Universidad Estatal de Milagro, (Ecuador).
Articulo recibido: 1 de Agosto del 2024
Articulo revisado: 3 de Agosto del 2024
Articulo aprobado: 19 de Septiembre del 2024
[1]Ingeniero en Marketing graduado de la Universidad Estatal de Milagro, (Ecuador). Magister en Estadística mención en Gestión de la Calidad y Productividad otorgado de la Escuela Superior Politécnica del Litoral, (Ecuador).
[2]Licenciada en Ciencias de la Educación mención Informática y Programación graduada de la Universidad Estatal de Milagro, (Ecuador). Magister en Educación mención en Enseñanza de la Lengua y Literatura otorgado por la Universidad Nacional de Educación, (Ecuador). Doctorante en Ciencias de la Educación con énfasis en Educación – Pedagogía en la Universidad de Panamá (Panamá).

Resumen

Este artículo explora la aplicación de técnicas algebraicas en la resolución de ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes en el caso homogéneo f(x)=0. Se presenta un enfoque detallado sobre la factorización y el uso de la fórmula general para resolver la ecuación característica asociada. Estas técnicas permiten obtener soluciones generales que describen el comportamiento de sistemas dinámicos sin la influencia de fuerzas externas, como circuitos eléctricos, sistemas mecánicos y osciladores armónicos. La factorización es efectiva cuando la ecuación característica puede descomponerse en factores lineales, lo que ocurre en sistemas con raíces racionales. Por otro lado, la fórmula general es un método universal que permite resolver ecuaciones cuadráticas independientemente de la naturaleza de sus raíces, ya sean reales o complejas. El estudio también resalta las implicaciones físicas de las soluciones obtenidas, como el decaimiento exponencial, el crecimiento o las oscilaciones periódicas. Asimismo, se analiza la relación entre las raíces de la ecuación característica y la estabilidad del sistema, un aspecto crucial en la ingeniería y el diseño de sistemas de control. Se concluye que las técnicas algebraicas para resolver ecuaciones diferenciales homogéneas de segundo orden no solo son esenciales desde un punto de vista teórico, sino que también tienen aplicaciones prácticas significativas en el análisis, diseño y optimización de sistemas dinámicos.

Palabras clave: Ecuaciones diferenciales, Factorización, Estabilidad.

Abstract

This paper explores the application of algebraic techniques in solving second-order differential equations with constant coefficients in the homogeneous case f(x)=0. A detailed approach to factorization and the use of the general formula to solve the associated characteristic equation is presented. These techniques allow obtaining general solutions that describe the behavior of dynamic systems without the influence of external forces, such as electrical circuits, mechanical systems, and harmonic oscillators. Factorization is effective when the characteristic equation can be decomposed into linear factors, which occurs in systems with rational roots. On the other hand, the general formula is a universal method that allows solving quadratic equations regardless of the nature of their roots, whether real or complex. The study also highlights the physical

implications of the obtained solutions, such as exponential decay, growth, or periodic oscillations. Likewise, the relationship between the roots of the characteristic equation and the stability of the system is analyzed, a crucial aspect in engineering and control system design. It is concluded that algebraic techniques for solving second-order homogeneous differential equations are not only essential from a theoretical point of view, but also have significant practical applications in the analysis, design and optimization of dynamic systems.
Keywords: Differential equations, Factorization, Stability.

Sumário

Este artigo explora a aplicação de técnicas algébricas na resolução de equações diferenciais de segunda ordem com coeficientes constantes no caso homogêneo f(x)=0. É apresentada uma abordagem detalhada da fatoração e do uso da fórmula geral para resolver a equação característica associada. Estas técnicas permitem obter soluções gerais que descrevem o comportamento de sistemas dinâmicos sem a influência de forças externas, como circuitos elétricos, sistemas mecânicos e osciladores harmônicos. A fatoração é eficaz quando a equação característica pode ser decomposta em fatores lineares, o que ocorre em sistemas com raízes racionais. Por outro lado, a fórmula geral é um método universal que permite resolver equações quadráticas independentemente da natureza das suas raízes, sejam elas reais ou complexas. O estudo também destaca as implicações físicas das soluções obtidas, como decaimento exponencial, crescimento ou oscilações periódicas. Da mesma forma, é analisada a relação entre as raízes da equação característica e a estabilidade do sistema, aspecto crucial na engenharia e projeto de sistemas de controle. Conclui-se que as técnicas algébricas para resolução de equações diferenciais homogêneas de segunda ordem não são apenas essenciais do ponto de vista teórico, mas também possuem aplicações práticas significativas na análise, projeto e otimização de sistemas dinâmicos.
Palavras-chave: Equações diferenciais, fatoração, estabilidade.

Introducción

Las ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes desempeñan un papel fundamental en la modelización matemática de fenómenos físicos, así como en diversas disciplinas científicas y de ingeniería. Estas ecuaciones se utilizan para caracterizar sistemas que exhiben comportamientos dinámicos intrincados, tales como oscilaciones, amortiguamientos o respuestas a estímulos externos. Mediante la interpretación y resolución de estas ecuaciones, se puede prever y comprender el comportamiento de sistemas físicos tales como circuitos eléctricos, estructuras mecánicas y procesos biológicos (Comet, A., Batard, L., & Mola, C., 2023).

Una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes tiene la forma general de $\boldsymbol{ay'' + by' + cy = f(x)}$, donde $\boldsymbol{y(x)}$ es la función desconocida, $\boldsymbol{y'}$y $\boldsymbol{y''}$son las derivadas primera y segunda, respectivamente, respecto a la variable independiente $\boldsymbol{x}$, y los coeficientes $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, y $\boldsymbol{c}$ son constantes. El término ***f(x)*** puede representar una fuerza externa o excitación del sistema y puede ser nulo (en el caso homogéneo) o no nulo (en el caso no homogéneo). La resolución de este tipo de ecuaciones es fundamental en muchas áreas del conocimiento, pues permite obtener una descripción detallada de la evolución temporal o espacial de sistemas bajo estudio (Alberto, A., & David, D., 2021).

La metodología algebraica para la resolución de ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes se enfoca en identificar soluciones a la ecuación característica asociada, que posee una naturaleza cuadrática. Esta ecuación facilita la identificación de las raíces, cuyo tipo de solución general es determinado por su naturaleza. En función de si las raíces son reales y distintas, reales e iguales o complejas, las soluciones podrían adoptar formas exponenciales, lineales o trigonométricas, proporcionando una perspectiva precisa del comportamiento del sistema modelado (Cáceres, M., & León, R., 2023).

Desde una perspectiva física, las ecuaciones diferenciales de segundo orden se utilizan extensivamente para la descripción de fenómenos tales como las vibraciones mecánicas, la dinámica de sistemas eléctricos y la propagación de ondas. Por ejemplo, en el examen de un sistema masa-resorte, la ecuación diferencial que regula el movimiento de la masa está directamente vinculada con los coeficientes que representan la rigidez del resorte y la resistencia del entorno. Igualmente, en los circuitos eléctricos de tipo RLC, las ecuaciones diferenciales delinean la interacción entre la resistencia, la inductancia y la capacitancia, permitiendo así la predicción del comportamiento del voltaje y la corriente en el circuito (Muñoz, J., Beltrán, S., Hernández, C., Cedeño, J., & Soto, C., 2023).

Una característica esencial de las ecuaciones diferenciales de segundo orden radica en su habilidad para representar sistemas con memoria, es decir, sistemas cuyo comportamiento futuro se halla condicionado tanto por su estado presente como por su historial de modificaciones. Este factor es de vital importancia en sistemas físicos que exhiben efectos de inercia o almacenamiento de energía, tal como en la amortiguación de vibraciones o en la respuesta de circuitos eléctricos a las variaciones en la corriente (Cáceres, 2024).

La implementación de métodos algebraicos, tales como la factorización de la ecuación característica o la utilización de la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas, reviste una relevancia significativa en la instrucción y el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales. Estas metodologías habilitan a estudiantes y profesionales para abordar de forma sistemática la resolución de problemas que implican ecuaciones de segundo orden, promoviendo una comprensión más profunda de los conceptos fundamentales. Adicionalmente, la metodología algebraica no solo resulta beneficiosa en el ámbito de la resolución analítica, sino que también establece un fundamento para métodos numéricos de mayor complejidad que se emplean cuando las soluciones precisas resultan inviables (Zambrano, A., Montenegro, L., & Bravo, R., 2024).

Dentro del campo de la ingeniería, se emplean las ecuaciones diferenciales de segundo orden en el diseño y análisis de sistemas que demandan un comportamiento exacto bajo condiciones fluctuantes. Los ingenieros emplean estas ecuaciones para la modelización y optimización de sistemas tales como puentes, vehículos y robots, garantizando una respuesta apropiada a cargas y fuerzas externas. Además, en los campos de la biología y la medicina, las ecuaciones diferenciales facilitan la modelización de procesos como el crecimiento, la interacción entre poblaciones y la diseminación de sustancias químicas en organismos vivos, un aspecto crucial para el avance de tratamientos y tecnologías biomédicas (Cardona, J., Leal, J., & Ustariz, J., 2020).

Desde una perspectiva matemática, la exploración de las ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes mantiene una estrecha relación con otras áreas del análisis matemático, tales como el álgebra lineal y las series de Fourier. Este hecho se manifiesta en que las soluciones a dichas ecuaciones pueden ser representadas como combinaciones lineales de funciones base, lo que evidencia la estructura lineal inherente al problema. Adicionalmente, en situaciones de mayor complejidad, las soluciones pueden ser aproximadas a través de series de funciones, expandiendo así el alcance de las técnicas algebraicas hacia campos como la teoría de control y la ingeniería de sistemas (Román, 2022).

La finalidad de esta investigación es profundizar en la aplicación de técnicas algebraicas para la resolución de ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes, poniendo especial atención en los métodos de factorización y la fórmula general. Mediante la representación de ejemplos ejemplares y la implementación práctica, se pretende evidenciar la aplicabilidad y utilidad de estas técnicas en la resolución de problemas habituales en los campos de la ciencia e ingeniería. Se investiga además las soluciones de la ecuación característica y su vinculación con el comportamiento dinámico de los sistemas físicos modelados por las ecuaciones diferenciales (Cáceres, 2023).

En última instancia, se procederá a examinar ciertas aplicaciones pertinentes de las ecuaciones diferenciales de segundo orden en contextos prácticos. Se expondrá un caso específico de un sistema masa-resorte, en el que se aplicarán las técnicas algebraicas previamente descritas para resolver la ecuación diferencial que dicta el movimiento del sistema. Esta estrategia tiene como objetivo proporcionar una perspectiva integral del proceso de resolución y la interpretación de los resultados obtenidos, subrayando la relevancia de las soluciones algebraicas en la comprensión y el análisis de sistemas dinámicos (Vergel, M., Rincón, O., & Ibargüen, E., 2022).

Desarrollo

Las ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes homogéneas, donde $f(x)=0$, son fundamentales en la modelización matemática de sistemas físicos y de ingeniería. En este tipo de ecuaciones, la dinámica del sistema es gobernada únicamente por sus propias propiedades internas, sin la influencia de una fuerza externa. La ecuación diferencial homogénea general se escribe como $ay''+by'+cy=0$, donde $y(x)$ es la función desconocida, y los coeficientes a, b y c son constantes que describen las características del sistema (Zill, D., Edwards Jr, C., & Penney, D., 2022).

El primer paso para resolver una ecuación diferencial de este tipo es plantear la ecuación característica, que es una ecuación cuadrática en la variable m, derivada a partir de la suposición de que la solución es de la forma $y(x)=e^{mx}$, donde m es una constante a determinar. Al sustituir esta forma en la ecuación diferencial homogénea $ay''+by'+cy=0$, se obtiene la ecuación cuadrática $am^2+bm+c=0$, que es clave para determinar el comportamiento del sistema. La naturaleza de las raíces de esta ecuación cuadrática dictará la forma general de la solución de la ecuación diferencial (Mucha, 2022).

La factorización es una de las técnicas algebraicas más simples y directas para resolver la ecuación característica cuando es posible descomponerla en factores lineales. Este método es aplicable cuando las raíces de la ecuación cuadrática son números racionales y la ecuación puede factorizarse fácilmente. Por ejemplo, para la ecuación diferencial $\boldsymbol{y'' - 5y' + 6y = 0}$, la ecuación característica es $\boldsymbol{m2 - 5m + 6 = 0}$, que puede factorizarse como ***(m−2) (m−3)=0***. Las raíces son $\boldsymbol{m_1 = 2}$ y $\boldsymbol{m_2 = 3}$, lo que lleva a la solución general $\boldsymbol{y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}}$, donde $\boldsymbol{C_1}$ y $\boldsymbol{C_2}$ son constantes determinadas por las condiciones iniciales del problema (Chamba, E., Puruncaja, D., Espín, J., & Padilla, N., 2024).

La factorización es una técnica eficaz cuando las raíces de la ecuación característica son reales y distintas. En este caso, las soluciones de la ecuación diferencial representan una combinación lineal de dos funciones exponenciales, lo que indica que el sistema tiene dos modos de comportamiento dinámico distintos. Este tipo de solución es común en sistemas físicos no amortiguados, como ciertos circuitos eléctricos o sistemas de vibración mecánica sin amortiguación (Fonseca, 2023).

Sin embargo, cuando la ecuación característica no puede factorizarse fácilmente, se recurre a la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas. Esta fórmula, también conocida como fórmula de Bhaskara, permite calcular las raíces de cualquier ecuación cuadrática, ya sean reales o complejas. La fórmula general es:

$$\boldsymbol{m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Un ejemplo típico en el que la factorización no es viable es la ecuación $\boldsymbol{2y'' - 4y' + 2y = 0}$, cuya ecuación característica es $\boldsymbol{2m^2 - 4m + 2 = 0}$. Aplicando la fórmula general, se obtiene una raíz doble $\boldsymbol{m = 1}$, lo que implica que la solución general es de la forma $\boldsymbol{y(x) = (C_1 + C_{2x})e^x}$. Este tipo de solución refleja un comportamiento crítico en el sistema, como en los sistemas amortiguados críticamente, donde el sistema regresa a su estado de equilibrio sin oscilar (Rodríguez, E., & Báez, L., 2023).

En el caso de que las raíces de la ecuación característica sean reales e iguales, la solución general incluye un término lineal adicional en *x* para garantizar la independencia de las soluciones. Esto se debe a que, cuando las raíces son iguales, las soluciones exponenciales correspondientes no son linealmente independientes, y el término adicional *x* es necesario para cubrir todas las posibles soluciones del sistema. Este tipo de comportamiento aparece en sistemas físicamente críticos, como un sistema masa-resorte críticamente amortiguado (García, J., Yañez, M., & López, M., 2022).

Cuando la ecuación característica tiene raíces complejas, las soluciones involucran funciones trigonométricas y exponenciales. Esto ocurre cuando el discriminante de la ecuación cuadrática, $\boldsymbol{b^2 - 4_{ac}}$, es negativo, lo que indica que las raíces son complejas conjugadas de la forma $\boldsymbol{m = \alpha \pm i\beta}$. En este caso, la solución general de la ecuación diferencial homogénea es $\boldsymbol{y(x) = e^{\alpha x}(C_1 cos\,(\beta x) + C_2 sin\,(\beta x))}$, donde $\boldsymbol{\alpha}$ es el componente de crecimiento o decaimiento exponencial, y $\boldsymbol{\beta}$ está relacionado con la frecuencia angular del sistema oscilatorio (Miranda, N., & Paz, I., 2023).

Las raíces complejas aparecen típicamente en sistemas que exhiben comportamiento oscilatorio, como en sistemas mecánicos o eléctricos con componentes inductivos y capacitivos. En estos casos, la presencia de términos sinusoidales en la solución refleja la naturaleza cíclica del sistema, donde el movimiento o la respuesta del sistema se repite en el tiempo. Este tipo de soluciones es fundamental para describir fenómenos como la resonancia y la amortiguación en sistemas oscilatorios (Cruz, J., Carbajal, F., Cambero, I., & Pérez, A., 2023).

La técnica de factorización, aunque sencilla, no siempre es aplicable, especialmente en sistemas complejos donde las raíces no son racionales o la ecuación no puede factorizarse fácilmente. En estos casos, la fórmula general es indispensable, ya que proporciona una solución precisa para cualquier tipo de ecuación cuadrática. Sin embargo, el análisis de las raíces complejas requiere un enfoque adicional, ya que implica la combinación de funciones exponenciales y trigonométricas, lo que añade un nivel de complejidad a la interpretación de las soluciones (Bolaños, M., Loría, J., & Picado, M., 2023).

Es importante destacar que las soluciones de las ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes dependen directamente de las raíces de la ecuación característica. Las raíces reales representan comportamientos exponenciales, mientras que las raíces complejas implican oscilaciones. Estas diferentes formas de soluciones tienen aplicaciones prácticas en la modelización de sistemas físicos, como la amortiguación de vibraciones en sistemas mecánicos, o la respuesta de circuitos eléctricos a excitaciones externas (Bolivar, J., & Ordoñez, B., 2023).

Desde un punto de vista algebraico, la resolución de ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes mediante factorización o la fórmula general proporciona una estructura clara y sistemática para abordar este tipo de problemas. Estas técnicas no solo son esenciales para obtener soluciones exactas, sino que también permiten una comprensión más profunda del comportamiento dinámico de los sistemas bajo estudio. En particular, la fórmula general es una herramienta poderosa que garantiza que se puedan encontrar soluciones para cualquier ecuación cuadrática, independientemente de la naturaleza de sus raíces (Cáceres, M., & León, R., 2023).

Las técnicas algebraicas de factorización y la fórmula general son herramientas clave para resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes en el caso homogéneo. Estas técnicas permiten obtener soluciones generales que describen el comportamiento dinámico de los sistemas físicos modelados por estas ecuaciones. Dependiendo de las raíces de la ecuación característica, las soluciones pueden representar decaimiento exponencial, crecimiento exponencial o comportamiento oscilatorio, lo que otorga una visión completa de las posibles dinámicas que un sistema puede exhibir (Fonseca, 2023).

Teoría de las ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones diferenciales de segundo orden son una herramienta clave en la modelización de fenómenos dinámicos que involucran la aceleración de una variable dependiente en relación con una variable independiente. Estas ecuaciones describen una amplia variedad de fenómenos, desde el movimiento oscilatorio en sistemas físicos hasta la evolución de variables en sistemas biológicos y económicos. En particular, las ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes se destacan por su simplicidad estructural y su aplicabilidad en múltiples disciplinas científicas (Zill, D., Edwards Jr, C., & Penney, D., 2022).

Una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes tiene la forma general:

$$\boldsymbol{ay'' + by' + cy = f(x)}$$

donde $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ son constantes, $\boldsymbol{y(x)}$ es la función incógnita, y $\boldsymbol{f(x)}$ representa una función externa. En el caso homogéneo, $\boldsymbol{f(x)=0}$, lo que simplifica el análisis ya que el sistema no está sujeto a fuerzas o perturbaciones externas (Alberto, A., & David, D., 2021). Este tipo de ecuaciones son comunes en sistemas donde las fuerzas internas, como la elasticidad o la amortiguación, determinan completamente la dinámica del sistema.

Ecuaciones diferenciales de segundo orden

Las ecuaciones diferenciales de segundo orden son aquellas en las que la incógnita involucra la segunda derivada de una función con respecto a una variable independiente. Para resolver estas ecuaciones, es usual suponer una solución de la forma $\boldsymbol{y(x) = e^{mx}}$, donde $\boldsymbol{m}$ es una constante que debe determinarse (Zill, D., Edwards Jr, C., & Penney, D., 2022). Este tipo de suposición es especialmente útil en ecuaciones lineales con coeficientes constantes, ya que, al sustituir esta forma en la ecuación diferencial, se obtiene una ecuación cuadrática denominada ecuación característica:

$$\boldsymbol{am^2 + bm + c = 0}$$

Esta ecuación cuadrática juega un papel crucial en la determinación de las soluciones generales de la ecuación diferencial de segundo orden. Las soluciones de la ecuación característica pueden ser reales y distintas, reales e iguales, o complejas conjugadas. Cada uno de estos casos da lugar a diferentes tipos de soluciones que reflejan el comportamiento dinámico del sistema bajo estudio (Chamba, E., Puruncaja, D., Espín, J., & Padilla, N., 2024).

Clasificación de las soluciones

Dependiendo de las raíces de la ecuación característica, la solución general de la ecuación diferencial puede adoptar distintas formas, que describen diferentes tipos de comportamiento dinámico.

Raíces reales y distintas: Si la ecuación característica tiene dos raíces reales y distintas, $\boldsymbol{m_1}$ y $\boldsymbol{m_2}$, la solución general de la ecuación diferencial será una combinación lineal de dos funciones exponenciales, que se expresa como:

$$\boldsymbol{y(x) = C_1 e^{m_1 x} + C_2\, e^{m_2 2x}}$$

Este tipo de solución es característico de sistemas que presentan dos modos de comportamiento dinámico independientes, como sistemas no amortiguados o donde no hay interferencias entre los diferentes componentes del sistema. Este comportamiento puede observarse en sistemas eléctricos o mecánicos sin fricción, donde las oscilaciones o movimientos se mantienen independientes y sin decaimiento (Alberto, A., & David, D., 2021).

Raíces reales e iguales: En el caso de que las raíces de la ecuación característica sean reales e iguales, la solución general adquiere una forma diferente. Aquí es necesario incluir un término lineal adicional para asegurar que las soluciones sean independientes entre sí. La forma de la solución es:

$$\boldsymbol{y(x) = (C_1 + C_{2^x})e^{mx}}$$

Este tipo de solución ocurre típicamente en sistemas críticamente amortiguados, como aquellos en los que se busca evitar la oscilación. Por ejemplo, en un sistema masa-resorte críticamente amortiguado, la masa regresará a su posición de equilibrio sin oscilaciones, lo que es un comportamiento deseado en muchas aplicaciones prácticas de ingeniería, como en sistemas de suspensión de vehículos (Gómez, 2023).

Raíces complejas: Si las raíces de la ecuación característica son complejas conjugadas, $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{\alpha} \pm \boldsymbol{i\beta}$, la solución general tiene una forma distinta, que incluye funciones trigonométricas y exponenciales. En este caso, la solución se expresa como:

$$\boldsymbol{y(x) = e^{ax}(C_1 cos\,(\beta x) + C_2 sin\,(\beta x))}$$

Las raíces complejas indican un comportamiento oscilatorio, lo que es típico en sistemas como el sistema masa-resorte con baja amortiguación o en circuitos eléctricos LC, donde las oscilaciones persisten a lo largo del tiempo. El término exponencial $\boldsymbol{e^{ax}}$ puede representar el crecimiento o el decaimiento del sistema, mientras que las funciones sinusoidales describen la frecuencia de oscilación (Martínez, M., Román, J., Samaniego, L., & Supe, D., 70).

Importancia de la ecuación característica

La ecuación característica es una herramienta fundamental en la resolución de ecuaciones diferenciales de segundo orden, ya que proporciona información directa sobre la naturaleza de las soluciones del sistema. Dependiendo del tipo de raíces que tenga la ecuación característica, se pueden inferir comportamientos dinámicos clave del sistema modelado. En términos físicos, las raíces reales están asociadas con soluciones exponenciales, lo que representa crecimiento o decaimiento en el tiempo. Por otro lado, las raíces complejas se asocian con oscilaciones periódicas, lo que es indicativo de un sistema cíclico o resonante (Espinoza, 2020).

Además, la ecuación característica también tiene implicaciones en la estabilidad del sistema. En sistemas donde las raíces tienen partes reales negativas, el sistema tenderá a regresar a su estado de equilibrio con el tiempo, lo que es indicativo de un sistema estable. Sin embargo, si alguna raíz tiene una parte real positiva, el sistema se volverá inestable, lo que puede resultar en un crecimiento exponencial descontrolado de las soluciones (Flores, I., García, J., & Haramboure, Y., 2020).

Métodos de resolución algebraica

La resolución de ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes se puede abordar mediante diferentes métodos algebraicos. Dos de los métodos más comunes son la factorización de la ecuación característica y el uso de la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas. Ambos métodos son útiles para determinar las raíces de la ecuación característica, que a su vez definen la solución general de la ecuación diferencial.

Factorización

La factorización es una técnica algebraica que permite descomponer la ecuación característica en factores lineales, siempre que sea posible. Este método es aplicable cuando las raíces de la ecuación cuadrática son números racionales, y la ecuación es fácilmente factorizable. Por ejemplo, consideremos la siguiente ecuación diferencial:

$$\boldsymbol{y'' - 5y' + 6y = 0}$$

La ecuación característica asociada es:

$$\boldsymbol{m^2 - 5m + 6 = 0}$$

Podemos factorizar esta ecuación como $\boldsymbol{(m-2)(m-3) = 0}$, de donde se obtiene las raíces $\boldsymbol{m_1 = 2}$ y $\boldsymbol{m_2 = 3}$. Estas raíces permiten escribir la solución general de la ecuación diferencial como:

$$\boldsymbol{y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}}$$

En este caso, la solución describe un sistema con dos modos de crecimiento exponencial, lo que es característico de sistemas que no están amortiguados y donde no hay un decaimiento exponencial significativo. La factorización es un método directo y sencillo para resolver ecuaciones diferenciales, siempre y cuando las raíces sean racionales (Bolaños, M., Loría, J., & Picado, M., 2023).

Fórmula general

Cuando la ecuación característica no puede ser factorizada fácilmente, se recurre a la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas. Esta fórmula es aplicable a cualquier ecuación cuadrática, independientemente de la naturaleza de las raíces (reales o complejas). La fórmula general es:

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4_{ac}}}{2_a}$$

Por ejemplo, considerando la ecuación diferencial:

$$2y'' - 4y' + 2y = 0$$

La ecuación característica asociada es:

$$2m^2 - 4m + 2 = 0$$

Aplicando la fórmula general, se obtiene:

$$m = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(2)(2)}}{2(2)} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{4} = \frac{4 \pm 0}{4} = 1$$

En este caso, la raíz es doble, **m=1**, lo que lleva a la siguiente solución general:

$$y(x) = (C_1 \ + C_{2^x})\, e^x$$

Este tipo de solución aparece en sistemas con amortiguación crítica, donde el sistema regresa a su estado de equilibrio sin oscilar, como ocurre en ciertos sistemas mecánicos y eléctricos donde la resistencia o fricción es lo suficientemente alta para prevenir oscilaciones (González, 2023).

Soluciones con raíces complejas

Cuando las raíces de la ecuación característica son complejas, las soluciones involucran tanto funciones exponenciales como trigonométricas. Por ejemplo, la ecuación diferencial:

$$y'' + y = 0$$

La ecuación característica asociada es:

$$m^2 + 1 = 0$$

Resolviendo esta ecuación, se obtienen raíces complejas $m = \pm i$. En este caso, la solución general es:

$$y(x) = C_1 cos\,(x) + C_2 sin\,(x)$$

Esta solución refleja un comportamiento oscilatorio puro, característico de sistemas como los circuitos LC o los sistemas masa-resorte sin amortiguación, donde las oscilaciones persisten indefinidamente sin perder amplitud. Este tipo de soluciones son fundamentales para el estudio de fenómenos como la resonancia y la frecuencia natural de sistemas oscilatorios (Montero, L., & Rubira, L., 2024).

Discusión

La investigación de las ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes, particularmente en el caso homogéneo ***f(x)=0***, constituye un campo esencial en el ámbito de las matemáticas aplicadas debido a su extenso espectro de aplicaciones en múltiples disciplinas científicas y de ingeniería. La relevancia de estas ecuaciones reside en su habilidad para representar sistemas dinámicos complejos, en los que el comportamiento del sistema se rige por las características internas del mismo, sin la intervención de fuerzas externas. Este examen ofrece un fundamento robusto para la comprensión de fenómenos tales como las oscilaciones mecánicas y eléctricas, el decaimiento exponencial y los sistemas críticos (Gómez, 2023).

Desde una perspectiva metodológica, la resolución de dichas ecuaciones mediante técnicas algebraicas, tales como la factorización y la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas, se manifiesta como una estrategia eficaz. La factorización constituye una metodología sencilla y directa, especialmente cuando la ecuación característica puede ser descomponida en factores lineales, facilitando así la obtención eficaz de soluciones. No obstante, su aplicación se encuentra restringida a los casos en los que las raíces de la ecuación son de naturaleza racional. Este aspecto restringe la implementación de la factorización en sistemas de mayor complejidad matemática, tales como los que implican coeficientes irracionales o complejos (Mucha, 2022).

Alternativamente, la fórmula general proporciona una solución más universal, dado que puede ser aplicada a cualquier ecuación cuadrática, sin importar la naturaleza de las raíces. Este procedimiento resulta imprescindible en situaciones en las que la factorización resulta inviable, como en sistemas con raíces dobles o complejas. Adicionalmente, la fórmula general facilita una comprensión más profunda del comportamiento del sistema en relación con el discriminante, que establece la naturaleza de las soluciones. Por lo tanto, la detección de raíces complejas o reales posibilita la predicción de si el sistema exhibirá un comportamiento oscilatorio, exponencial o crítico, aspecto crucial para la toma de decisiones en contextos prácticos (González, 2023).

Dentro del ámbito de los sistemas físicos, las resoluciones derivadas de ecuaciones diferenciales homogéneas poseen una relevancia directa en el diseño y análisis de sistemas mecánicos y eléctricos. Por ejemplo, las soluciones con raíces auténticas y diferenciadas son indicativas de sistemas no amortiguados o de baja amortiguación, en los que las variables del sistema evolucionan de forma autónoma, sin un patrón oscilatorio claramente determinado. Estos sistemas son frecuentemente observados en circuitos eléctricos sin resistencia considerable o en sistemas de vibración sin fricción, en los que la energía no se disipa rápidamente (Bolivar, J., & Ordoñez, B., 2023).

Las soluciones con raíces complejas caracterizan sistemas oscilatorios, lo cual adquiere particular relevancia en aplicaciones que implican osciladores armónicos, tales como los sistemas masa-resorte y los circuitos eléctricos RLC. En estos sistemas, las funciones trigonométricas presentes en la solución representan la periodicidad del fenómeno, mientras que la denominación exponencial vinculada a la parte real de las raíces complejas denota el incremento o decremento de la amplitud de las oscilaciones en función del tiempo (Montero, L., & Rubira, L., 2024). Este tipo de comportamiento resulta esencial en la concepción de sistemas de resonancia magnética y en la atenuación de vibraciones involuntarias en estructuras mecánicas.

El examen de sistemas con raíces auténticas e idénticas también posee implicaciones significativas en el estudio de sistemas críticamente amortiguados. En tales situaciones, la solución incorpora un término adicional que asegura la independencia de las soluciones propuestas. Este aspecto es esencial en aplicaciones de ingeniería, donde se persigue prevenir la oscilación y asegurar que el sistema retorne con prontitud a su estado de equilibrio.

Ejemplos de estos sistemas comprenden las suspensiones de vehículos y los amortiguadores, situaciones en las que se requiere regular el movimiento para prevenir daños y garantizar el confort y la seguridad (Gómez, 2023).

Un elemento significativo en el debate es la interrelación entre las raíces de la ecuación característica y la estabilidad del sistema. En los sistemas físicos y de control, la estabilidad desempeña un papel crucial, dado que determina si el sistema retornará a un estado de equilibrio o si experimentará un incremento exponencial descontrolado. La existencia de raíces con componentes reales negativos es un indicador de estabilidad, lo que implica que las soluciones experimentarán una decadencia a lo largo del tiempo. En contraposición, las raíces con partes reales positivas indican inestabilidad, lo cual puede resultar en oscilaciones ascendentes o incluso en la destrucción del sistema (Espinoza, 2020).

Pese a la relevancia de los métodos algebraicos en la resolución de ecuaciones diferenciales de segundo orden homogéneas, es crucial reconocer que existen restricciones al ser aplicados a problemas de mayor complejidad, como los que implican coeficientes no constantes o ecuaciones no lineales. En tales situaciones, la obtención de soluciones precisas no siempre resulta factible, lo que implica la necesidad de recurrir a métodos numéricos o aproximaciones. No obstante, el análisis algebraico de la ecuación característica ofrece una base teórica robusta para entender el comportamiento general del sistema previo a la implementación de técnicas más sofisticadas (Cáceres, M., & León, R., 2023).

La instrucción de estos métodos en el marco de las matemáticas aplicadas y la ingeniería resulta imprescindible para la capacitación de futuros profesionales. Entender la resolución de ecuaciones diferenciales de segundo orden a través de métodos algebraicos confiere a los estudiantes herramientas esenciales para afrontar problemas prácticos en campos como la física, la biología, la economía y la ingeniería. Estas ecuaciones constituyen no solo un componente esencial del currículo, sino también un canal hacia su implementación práctica en el ámbito profesional (Cardona, J., Leal, J., & Ustariz, J., 2020).

Conclusiones

La exploración de las ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes en su forma homogénea constituye un instrumento indispensable para la comprensión del comportamiento dinámico de variados sistemas en las disciplinas de las ciencias y la ingeniería. Estas ecuaciones, al representar sistemas desprovistos de fuerzas externas, facilitan el análisis de cómo las características internas del sistema influyen en su evolución. Las soluciones derivadas mediante técnicas algebraicas, tales como la factorización y la fórmula general, proporcionan un marco riguroso y eficiente para la comprensión de estos comportamientos.

La factorización se distingue como un procedimiento sencillo y eficaz cuando las raíces de la ecuación característica son racionales, posibilitando la obtención directa de soluciones. No obstante, la ecuación general resulta imprescindible en circunstancias de mayor complejidad, como cuando las raíces son irracionales o complejas. Esto convierte a la fórmula general en un recurso fundamental en el análisis de sistemas dinámicos, dado que asegura la obtención de soluciones sin tener en cuenta la naturaleza intrínseca de las raíces.

En contextos prácticos, estas ecuaciones facilitan la modelización de una diversidad de sistemas, que abarcan desde el estudio de vibraciones mecánicas hasta el comportamiento de circuitos eléctricos. Las soluciones generales derivadas de las ecuaciones diferenciales homogéneas suministran información esencial acerca de la evolución temporal de los sistemas, ya sea mediante oscilaciones, crecimiento o decaimiento exponencial. Esto resulta particularmente beneficioso en el diseño y la optimización de sistemas donde la regulación de dichas dinámicas resulta indispensable, como en el caso de la amortiguación o la resonancia.

En última instancia, la evaluación de la ecuación característica y la esencia de sus raíces ofrece una comprensión detallada sobre la estabilidad de los sistemas biológicos. La habilidad para prever la estabilidad o inestabilidad de un sistema en función de sus soluciones es esencial para garantizar un funcionamiento seguro y eficiente de los sistemas. La relevancia de este enfoque teórico no se limita a la comprensión matemática, sino que también se manifiesta en su aplicación práctica en múltiples disciplinas de la ciencia y la ingeniería. Las ecuaciones diferenciales homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes, solucionadas a través de técnicas algebraicas, proporcionan una estrategia robusta para tratar problemas de alta complejidad, simplificando el análisis, diseño y control de sistemas dinámicos en una diversidad de aplicaciones.

Bibliografía

Alberto, A., & David, D. (2021). Solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden por el método de Splines Cúbicos, asistido con Matlab.

Bolaños, M., Loría, J., & Picado, M. (2023). Sentido estructural que manifiesta un grupo de docentes de matemática en pre-servicio cuando resuelven tareas sobre factorización. *Estudios Pedagógicos, 49(3)*, 109-129.

Bolivar, J., & Ordoñez, B. (2023). Modelo matemático para un sistema de amortiguamiento aplicado al tren de aterrizaje retráctil de una aeronave. *Télématique: Revista Electrónica de Estudios Telemáticos, 22(1)*, 63-83.

Cáceres, M. (2023). Conocimientos previos y GeoGebra en la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias. *Revista Diálogo Interdisciplinario sobre Educación-REDISED*, 121-134.

Cáceres, M. (2024). Aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias mediado con GeoGebra. *Revista Guatemalteca de Educación Superior, 7(1)*, 96-112.

Cáceres, M., & León, R. (2023). Estrategia didáctica para desarrollar un esquema gráfico y algebraico del concepto de solución de una ecuación diferencial ordinaria: Un Estudio de Casos. *Revista Diálogo Interdisciplinario sobre Educación-REDISED*, 59-88.

Cardona, J., Leal, J., & Ustariz, J. (2020). Modelado matemático de caja blanca y negra en educación en ingeniería. *Formación universitaria, 13(6)*, 105-118.

Chamba, E., Puruncaja, D., Espín, J., & Padilla, N. (2024). Los enfoques didácticos para resolución de ecuaciones cuadráticas gráficas y numéricas en décimo grado de Educación Básica Superior. *Revista Científica Arbitrada Multidisciplinaria Pentaciencias, 6(3)*, 25-34.

Comet, A., Batard, L., & Mola, C. (2023). Alternativa didáctica para la estructuración del proceso de enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas con parámetro pequeño. *Paradigma, 44(1)*.

Cruz, J., Carbajal, F., Cambero, I., & Pérez, A. (2023). Simulación y evaluación de modulación por ancho de pulso sinusoidal en drivers trifásicos para motores síncronos (simulation and evaluation of sinusoidal pulse width modulation in three-phase drivers for permanent magnet synchronous motors). *Pistas Educativas, 45(145)*.

Espinoza, I. (2020). Aplicación de las Ecuaciones Diferenciales a las Vibraciones no Amortiguadas con Excitación Armónica. *Ingenio y Conciencia Boletín Científico de la Escuela Superior Ciudad Sahagún, 7(13)*, 49-55.

Flores, I., García, J., & Haramboure, Y. (2020). Estabilidad de taludes durante un desembalse rápido en presas de tierra con suelos parcialmente saturados. *Ingeniería y Desarrollo, 38(1)*, 13-31.

Fonseca, R. (2023). El uso del conocimiento tecnológico, pedagógico y de contenido como una estrategia en el aprendizaje de la factorización de expresiones algebraicas *(Doctoral dissertation, Facultad de Ciencias Básicas).*

García, J., Yañez, M., & López, M. (2022). Conexiones matemáticas promovidas en los planes y programas de estudio mexicanos de nivel secundaria y media superior sobre el concepto de ecuación cuadrática. *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH, (13)*, 17.

Gómez, D. (2023). Ecuaciones diferenciales de segundo orden y su aplicación a las vibraciones mecánicas.

González, H. (2023). Descripción de algunos métodos de solución de ecuaciones algebraicas de tercer y cuarto grado en una variable: una reseña histórica. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet, 23(2)*, 1-28.

Martínez, M., Román, J., Samaniego, L., & Supe, D. (70). Modelamiento matemático y análisis oscilatorio del péndulo físico. *Polo del Conocimiento: Revista científico-profesional, 7(2)*, 2022.

Miranda, N., & Paz, I. (2023). Funciones analíticas de variable compleja.

Montero, L., & Rubira, L. (2024). Una añadidura con ayuda de Geogebra, a los métodos de solución de la ecuación cuadrática ax2+ bx+ c= 0. *Unión-Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20(71)*.

Mucha, D. (2022). Materiales concretos como estrategia metodológica para lograr aprendizajes significativos de ecuación cuadrática en estudiantes del Ciclo II-2021-Escuela Profesional de Educación.

Muñoz, J., Beltrán, S., Hernández, C., Cedeño, J., & Soto, C. (2023). Análisis de vibraciones mecánicas para resortes helicoidales en paralelo empleando el software Octave. *Ingenio y Conciencia Boletín Científico de la Escuela Superior Ciudad Sahagún, 10(20)*, 56-65.

Rodriguez, E., & Báez, L. (2023). BoxSet, un material didáctico para la enseñanza de la factorización.

Román, W. (2022). La educación matemática realista en el estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias (Master's thesis, Universidad Internacional de Andalucía).

Vergel, M., Rincón, O., & Ibargüen, E. (2022). Ecuaciones diferenciales y aplicaciones.

Zambrano, A., Montenegro, L., & Bravo, R. (2024). El uso de rompecabezas para la enseñanza de factorización. *MQRInvestigar, 8(3)*, 5337-5361.

Zill, D., Edwards Jr, C., & Penney, D. (2022). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado. *Ed. Thomson Learnig*.