

**VALIDEZ DE LA APROXIMACIÓN DE ÁNGULOS PEQUEÑOS EN EL PÉNDULO
SIMPLE: IMPLICACIONES PARA LABORATORIO UNIVERSITARIO
VALIDITY OF THE SMALL-ANGLE APPROXIMATION IN THE SIMPLE PENDULUM:
IMPLICATIONS FOR UNIVERSITY LABS**

Autores: ¹Jorge Luis Puyol Cortez, ²Jenniffer Andrea Castillo García, ³Angie Julissa Caicedo Quintero, ⁴Thalya Brighth Bone Guagua, ⁵Atanacio Quintero Cimarrón y ⁶Wendy Marisabel Tapuyo Añapa.

¹ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-0734-694X>

²ORCID ID: <https://orcid.org/0009-0007-6657-9739>

³ORCID ID: <https://orcid.org/0009-0000-6127-015X>

⁴ORCID ID: <https://orcid.org/0009-0008-0100-7366>

⁵ORCID ID: <https://orcid.org/0009-0009-1397-3657>

⁶ORCID ID: <https://orcid.org/0009-0005-8618-4166>

¹E-mail de contacto: jorge.puyol@utelvt.edu.ec

²E-mail de contacto: jenniffer.castillo.garcia@utelvt.edu.ec

³E-mail de contacto: angie.caicedo.quintero@utelvt.edu.ec

⁴E-mail de contacto: thalya.bone.guagua@utelvt.edu.ec

⁵E-mail de contacto: atanacio.quintero.cimarron@utelvt.edu.ec

⁶E-mail de contacto: wendy.tapuyo.anapa@utelvt.edu.ec

Afiliación: ¹*²*³*⁴*⁵*⁶* Universidad Técnica Luis Vargas Torres, Esmeraldas, (Ecuador).

Artículo recibido: 29 de Octubre del 2025

Artículo revisado: 31 de Octubre del 2025

Artículo aprobado: 9 de Noviembre del 2025

¹PhD. en Ciencias de la Educación mención Enseñanza de la Física, egresado de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, (Ecuador). Magíster en Gerencia y Liderazgo Educacional, egresado de la Universidad Técnica Particular de Loja, (Ecuador). Magíster en Matemáticas Mención en Modelación y Docencia, egresado de la Universidad Técnica Luis Vargas Torres, Esmeraldas, (Ecuador).

²Estudiante de Pedagogía de las Ciencias Experimentales de la Matemática y la Física, Universidad Técnica Luis Vargas Torres, Esmeraldas, (Ecuador).

³Estudiante de Pedagogía de las Ciencias Experimentales de la Matemática y la Física, Universidad Técnica Luis Vargas Torres, Esmeraldas, (Ecuador).

⁴Estudiante de Pedagogía de las Ciencias Experimentales de la Matemática y la Física, Universidad Técnica Luis Vargas Torres, Esmeraldas, (Ecuador).

⁵Estudiante de Pedagogía de las Ciencias Experimentales de la Matemática y la Física, Universidad Técnica Luis Vargas Torres, Esmeraldas, (Ecuador).

⁶Estudiante de Pedagogía de las Ciencias Experimentales de la Matemática y la Física, Universidad Técnica Luis Vargas Torres, Esmeraldas, (Ecuador).

Resumen

Este estudio tuvo como objetivo delimitar el rango práctico de validez de la aproximación de ángulos pequeños en el péndulo simple y sintetizar recomendaciones para su medición experimental y su enseñanza en laboratorios universitarios. Se realizó una revisión narrativa con énfasis entre 2020-2025, que integró fundamentos teóricos, evidencia experimental en laboratorios de pregrado, propuestas de corrección del período a gran amplitud mediante series de Fourier y mediante el promedio aritmético geométrico, y experiencias con instrumentación accesible basada en teléfonos inteligentes,

microcontroladores y análisis por vídeo. Se consultaron bases internacionales, se aplicaron criterios de inclusión y exclusión, y se valoró la calidad metodológica de los estudios. Los resultados muestran que la linealización es adecuada cuando la amplitud inicial es reducida y que el error del período crece monótonamente con la amplitud. Se identifican umbrales orientativos útiles: alrededor de diez grados el error es bajo; cerca de veinte grados, se mantiene bajo el uno por ciento en la mayoría de montajes; hacia treinta grados, se aproxima a valores cercanos a dos por ciento. A partir de amplitudes medias, conviene emplear correcciones no lineales o la expresión exacta del período. Operativamente, medir la

longitud efectiva hasta el centro de masa, controlar la amplitud inicial, cronometrar múltiples oscilaciones y considerar amortiguamiento lineal o cuadrático mejora la coherencia entre modelo y dato. Se concluye que la combinación de simulación y medición real fortalece el aprendizaje y favorece secuencias curriculares en espiral.

Palabras clave: Péndulo simple, Aproximación de ángulos pequeños, Período del péndulo, Instrumentación con teléfonos inteligentes, Enseñanza de Física universitaria.

Abstract

This study aimed to delineate the practical range of validity of the small-angle approximation for the simple pendulum and to synthesize recommendations for its experimental measurement and instruction in university laboratories. A narrative review was conducted with emphasis between 2020-2025, integrating theoretical foundations, experimental evidence from undergraduate laboratories, proposals for correcting the period at large amplitudes using Fourier series and the arithmetic–geometric mean, and experiences with accessible instrumentation based on smartphones, microcontrollers, and video analysis. International databases were consulted, inclusion and exclusion criteria were applied, and the methodological quality of studies was appraised. The scope included small-angle validity, large-amplitude behavior, damping, and classroom implementation in introductory physics courses and laboratory practice. The review covered conceptual and operational aspects.

The findings show that the linearization is appropriate when the initial amplitude is small and that the error in the period increases monotonically with amplitude. Useful orienting thresholds are identified: around ten degrees the error is low; near twenty degrees, it remains below one percent in most setups; toward thirty degrees, it approaches values close to two percent. From medium amplitudes onward, it is advisable to employ nonlinear corrections or the exact expression of the

period. Operationally, measuring the effective length to the center of mass, controlling the initial amplitude, timing multiple oscillations, and considering linear or quadratic damping improves coherence between model and data. It is concluded that combining simulation with real measurement strengthens learning and supports spiral curricular sequences.

Palavras-chave: Simple pendulum, Small-angle approximation, Pendulum period, Smartphone-based instrumentation, University Physics education.

Introducción

En la enseñanza universitaria de la mecánica, el péndulo simple suele presentarse mediante la linealización $\sin \theta \approx \theta$, de la cual se deduce el período para amplitudes pequeñas:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Sin embargo, el modelo exacto está gobernado por:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0,$$

y el período real depende de la amplitud inicial θ_0 :

$$T(\theta_0) = 4 \sqrt{\frac{\ell}{g}} K \left(\sin \frac{\theta_0}{2} \right)$$

donde $K(\cdot)$ es la integral elíptica completa de primera especie. La literatura reciente ha popularizado aproximaciones bastante asequibles desde el punto de vista didáctico — por ejemplo, desarrollos en series de Fourier y fórmulas cerradas basadas en el promedio aritmético-geométrico (AGM)— que capturan el incremento sistemático de T con θ_0 y permiten cuantificar el error relativo:

$$\varepsilon(\theta_0) = \frac{T(\theta_0) - T_0}{T_0}$$

en cursos de grado (Hinrichsen, 2021; Black y Vel, 2023; BigAlabo, 2023; Boulanger y Buisseret, 2020). En los laboratorios universitarios, por razones de operatividad y seguridad, es habitual trabajar con amplitudes que exceden la “pequeñez” ideal y con instrumentación de bajo costo. El uso de smartphones y microcontroladores posibilita muestreos de alta frecuencia y estimaciones precisas del período más allá del régimen lineal, con guías consolidadas y experiencias replicables en cohortes numerosas (Li et al., 2020; Lukovic et al., 2021; Mathevet et al., 2022; Monteiro y Martí, 2022). Desde la perspectiva formativa, considerar variantes, amortiguado y forzado, fortalece la discusión sobre disipación, resonancia y respuesta no lineal, y ayuda a delimitar el dominio de validez de la linealización en el aula. Asimismo, el péndulo invertido funciona como puente con contenidos de control moderno, favoreciendo la transición de modelos lineales a no lineales mediante simulación y práctica (Lubarda y Lubarda, 2021; Cumber, 2023; Pal et al., 2023; Liu et al., 2024).

Este artículo presenta una revisión narrativa con énfasis en los años 2020–2025 que integra y sintetiza de manera crítica aportes teóricos y empíricos para estimar el rango de amplitudes en el que la aproximación de ángulos pequeños mantiene errores aceptables en laboratorio; comparar aproximaciones modernas del período a gran amplitud y su factibilidad didáctica; analizar la influencia del amortiguamiento y el forzamiento en el diseño de prácticas; y compilar buenas prácticas de instrumentación accesible que alineen modelo y datos en cursos iniciales. La motivación estuvo en optimizar guías y secuencias de laboratorio en la Universidad Técnica Luis Vargas Torres de Esmeraldas, favoreciendo la coherencia teórica-experimental esperada en Física I/II

(Monteiro y Martí, 2022; Mathevet et al., 2022). El péndulo simple ideal (masa puntual, hilo inextensible, sin rozamiento) se describe por:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0, \theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = 0$$

La linealización ($\sin \theta \approx \theta$) conduce a:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0, \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}, T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

En el modelo exacto (sin rozamiento), el período depende de θ_0 :

$$T(\theta_0) = 4 \sqrt{\frac{\ell}{g}} K \left(\sin \frac{\theta_0}{2} \right)$$

con K la integral elíptica completa de primera especie. Para docencia y cálculo práctico destacan dos rutas: series (p. ej., correcciones tipo Fourier de T_0 con potencias de θ_0) y AGM mediante

$$K(k) = \frac{\pi}{2 \operatorname{AGM}(1, \sqrt{1-k^2})} \Rightarrow T(\theta_0) = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \frac{1}{\operatorname{AGM}(1, \sqrt{1-\sin^2(\theta_0/2)})}$$

Como medida de validez se usa

$$\varepsilon(\theta_0) = \frac{T(\theta_0) - T_0}{T_0}.$$

La expansión asintótica clásica ofrece (radianes):

$$\frac{T(\theta_0)}{T_0} \approx 1 + \frac{1}{16} \theta_0^2 + \frac{11}{3072} \theta_0^4$$

lo que da estimaciones útiles en el aula:

$$\theta_0 = 10^\circ \Rightarrow \varepsilon \approx 0.19\%,$$

$$\theta_0 = 20^\circ \Rightarrow \varepsilon \approx 0.77\%,$$

$$\theta_0 = 30^\circ \Rightarrow \varepsilon \approx 1.74\%$$

(Hinrichsen, 2021; Black y Vel, 2023; BigAlabo, 2023). En sistemas reales, la resistencia del aire y el rozamiento en el pivote introducen amortiguamiento (lineal y/o

cuadrático) que atenúa la amplitud y puede sesgar T si no se controla. Los modelos viscosos/cuadráticos guían protocolos metrológicos (medición de longitud efectiva, técnica de liberación y cronometraje de múltiples oscilaciones) antes de comparar con el caso ideal o con AGM (Lubarda & Lubarda, 2021). Como extensiones de alto valor didáctico, el péndulo forzado permite introducir resonancia/bifurcaciones y, en ciertos regímenes, comportamientos complejos; ello acota el dominio de validez de la linealización y habilita actividades de contraste modelo-dato (Cumber, 2023; Pal et al.2023). Como extensión conceptual de alto valor didáctico, el péndulo forzado permite introducir resonancia, bifurcaciones y, en ciertos regímenes, comportamientos complejos que contrastan nítidamente con la predicción lineal, ayudando a demarcar el ámbito de validez de $\sin \theta \approx \theta$ y a diseñar secuencias de aprendizaje más ricas (Cumber, 2023; Pal et al., 2023). Por su parte, el péndulo invertido actúa como puente entre oscilaciones y control moderno (estabilidad, realimentación), y se utiliza para consolidar la transición desde el modelo lineal a sistemas no lineales e inestables en laboratorio y simulación (Liu et al., 2024).

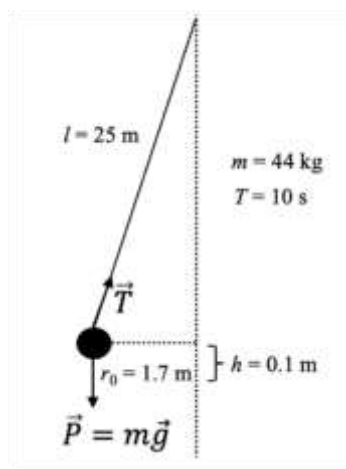


Figura 1. Esquema del péndulo simple: modelo exacto vs. linealización $\sin \theta \approx \theta$.

Fuente: Tomada de *The Formulations of Classical Mechanics with Foucault's Pendulum*, Figura 1(c), por N. Boulanger y F. Buisseret, 2020, *Physics*, 2(4), 531–540. CC BY 4.0.

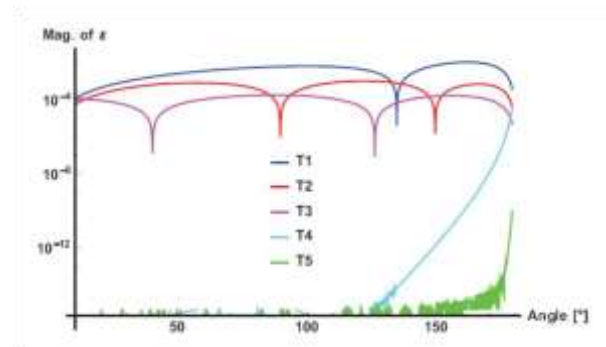


Figura 2. Error relativo del período $\varepsilon(\theta_0)$ frente a la amplitud (0° – 60°): exacto, series tipo Fourier y fórmula AGM

Fuente: Reproducida de Fifth-order AGM-formula for the period of a large-angle pendulum, Figura 1, por A. Big-Alabo, 2023, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 45, e20230014. CC BY 4.0.

En la figura se puede observar: θ (ángulo), θ_0 (amplitud inicial), ℓ (longitud efectiva), g (aceleración gravitatoria), ω_0 (frecuencia natural lineal), T_0 (período lineal), $T(\theta_0)$ (período exacto), k (módulo elíptico), $K(k)$ (integral elíptica completa), AGM (promedio aritmético-geométrico).

Materiales y Métodos

En lo que respecta a diseño y alcance, este trabajo se basó en una revisión narrativa con síntesis temática-crítica orientada a delimitar la validez y límites de la aproximación de ángulos pequeños del péndulo simple en contexto universitario, incorporando, cuando aportaban a esa delimitación, las variantes amortiguada, forzada e invertida. Para reforzar la transparencia, se adoptaron buenas prácticas PRISMA 2020. La calidad se valoró con

SANRA (sin metaanálisis). Sobre la cobertura temporal y las fuentes consultadas, se tuvo en cuenta el periodo enero 2020–octubre 2025; se admitieron trabajos previos únicamente cuando fueron insustituibles para fundamentos teóricos, en las bases Scopus, Web of Science, ERIC, AIP/Scitation, IOPscience, IEEE Xplore, SciELO/RedALyC y arXiv (solo si existía publicación revisada por pares del mismo estudio). Como estrategia de búsqueda, se utilizaron términos en español e inglés con operadores booleanos y comodines, además de búsqueda hacia atrás (referencias) y hacia adelante (citantes): "pendulum" AND (period OR "small-angle" OR "large amplitude") AND (teaching OR laboratory OR undergraduate); péndulo AND (período OR "ángulos pequeños" OR "gran amplitud") AND (docencia OR laboratorio OR universidad). Por otro lado, se documentaron fechas, filtros, cadenas y manejo de duplicados.

En cuanto a los criterios de inclusión, se consideraron aquellos artículos revisados por pares sobre péndulo simple (y variantes pertinentes) con relación explícita a validez de la aproximación y/o a su enseñanza/medición en educación superior; propuestas de corrección del período (Fourier, AGM) o estudios experimentales factibles con instrumentación accesible (smartphones, microcontroladores, fotopuertas); texto completo disponible; español o inglés. Con respecto a los criterios de exclusión, se descartaron aquellos resúmenes sin artículo; literatura gris no verificable; estudios exclusivamente preuniversitarios sin extrapolación a grado; trabajos de control/instrumentación sin vínculo didáctico/metrológico; así como duplicados. Para la extracción de datos, se elaboró una matriz con modelo (ideal/no lineal, amortiguado, forzado, invertido), rango de amplitudes y su reporte, correcciones (Fourier,

AGM), configuración experimental (longitud efectiva, técnica de liberación, cronometraje, n° de oscilaciones), instrumentación (smartphone, Arduino/fotopuertas), variables (período, $\varepsilon(\theta_0)$, decremento logarítmico), contexto/población y hallazgos didácticos. La calidad se evaluó por medio de SANRA (6 ítems, 0–2 por ítem; total 0–12). Y las dudas quedaron resueltas por segunda lectura y registro de decisión. Luego se hizo una síntesis centrada en cuatro aspectos: fundamentos y límites teóricos; evidencia experimental y fuentes de error (longitud efectiva, liberación, cronometraje, amortiguamiento); simulación e instrumentación accesible; valor pedagógico de las extensiones para acotar el dominio de validez. Se priorizaron figuras y recomendaciones operativas aplicables a laboratorios de la Universidad Técnica Luis Vargas Torres de Esmeraldas.

Resultados y Discusión

La evidencia teórica y experimental coincide en que la aproximación de ángulos pequeños describe fielmente el período del péndulo para amplitudes reducidas, y que su error relativo crece de forma monótona con la amplitud inicial θ_0 . Considerando $T_0 = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ y el período exacto $T(\theta_0) = 4\sqrt{\ell/g} K(\sin(\theta_0/2))$, la expansión clásica $T/T_0 \approx 1 + \theta_0^2/16 + 11\theta_0^4/3072$ (radianes) permite estimar umbrales didácticos orientativos:

$$\theta_0 = 10^\circ \Rightarrow \varepsilon \approx 0.19\%$$

$$\theta_0 = 20^\circ \Rightarrow \varepsilon \approx 0.77\%$$

$$\theta_0 = 30^\circ \Rightarrow \varepsilon \approx 1.74\%$$

En consecuencia, la linealización es adecuada para prácticas con ángulos pequeños y tiempos de medición moderados; a mayor amplitud, conviene aplicar correcciones (series tipo

Fourier o fórmulas AGM) o delimitar explícitamente el dominio de validez en la guía de laboratorio (Hinrichsen, 2021; Black y Vel, 2023; BigAlabo, 2023).



Figura 3. Rango de validez de la aproximación de ángulos pequeños. Bandas de amplitud en grados con valores orientativos del error relativo $\varepsilon(\theta_0) = [T(\theta_0) - T_0]/T_0$ obtenidos de la expansión $T/T_0 \approx 1 + \theta_0^2/16 + 11\theta_0^4/3072$ (radianes).

Fuente: elaboración propia a partir de Hinrichsen (2021) y contraste con Black y Vel (2023) y BigAlabo (2023).

Los valores 10°, 20° y 30° se señalan como hitos didácticos por su uso en laboratorio. En montajes universitarios con instrumentación accesible (smartphones, microcontroladores), los registros de alta frecuencia facilitan estimaciones de T más allá del régimen lineal y confirman la tendencia anterior en datos reales. Las experiencias de aula reportan prácticas replicables con cohortes numerosas y guías para integrar sensores móviles en cursos introductorios, lo que mejora la coherencia modelo-dato y el razonamiento metrológico del estudiantado (Mathevet et al., 2022; Monteiro y Martí, 2022; Lukovic et al., 2021; Li et al., 2020). Respecto a fuentes de error experimentales en la estimación de T : la longitud efectiva debe medirse desde el punto de suspensión hasta el centro de masa; la técnica de liberación ha de minimizar impulsos

laterales; el cronometraje de múltiples oscilaciones reduce la incertidumbre aleatoria; y controlar la amplitud inicial es clave para interpretar $\varepsilon(\theta_0)$. Estos puntos se reiteran en los estudios de laboratorio con Arduino/fotopuertas y teléfonos inteligentes citados (Lukovic et al., 2021; Li et al., 2020; Mathevet et al., 2022).

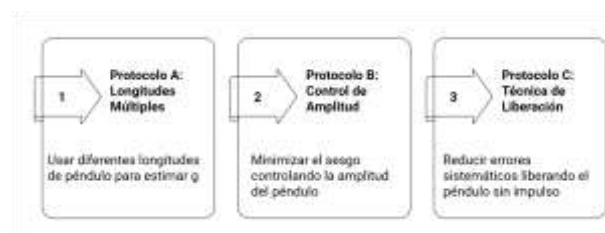


Figura 4. Esquema de protocolos de práctica para estimar T .

Medición de longitud efectiva hasta el centro de masa; control de amplitud y técnica de liberación; cronometraje de N oscilaciones y cálculo de T y $\varepsilon(\theta_0)$; Opcional: estimación del decremento logarítmico bajo amortiguamiento leve.

Fuente: Elaboración propia, basada en Li, Liu, y Zhou (2020); Lukovic et al. (2021); y Mathevet et al. (2022).

El amortiguamiento (arrastre del aire y rozamiento en el pivote) puede sesgar levemente las estimaciones de T si no se controla o corrige. Modelos con arrastre lineal y/o cuadrático muestran cómo la atenuación de la amplitud y su posible dependencia del período con θ_0 afectan la comparación con el caso ideal, lo que refuerza la necesidad de protocolos metrológicos (medida precisa de l , control de θ_0 y cronometraje) antes de contrastar con $K(k)$ o AGM (Lubarda y Lubarda, 2021). Por último, los estudios de simulación y práctica en aula indican que combinar exploración paramétrica (simulador) con mediciones reales (sensórica móvil) mejora

la alineación teórico-experimental y la detección de no linealidades mediante análisis de residuos y ajustes de modelos. Esta integración resulta especialmente útil para acotar el rango donde la linealización es válida y preparar extensiones hacia regímenes forzados o invertidos cuando el currículo lo requiera (Monteiro y Martí, 2022; Mathevet et al., 2022). Los resultados recopilados confirman que el péndulo simple constituye un sistema no lineal cuyo período se aparta de la predicción isócrona del modelo armónico cuando crece la amplitud inicial. Este comportamiento, esperado por la forma exacta elíptica del período y bien documentado en las revisiones recientes, se ve con nitidez en el rango didáctico habitual ($\approx 10\text{--}30^\circ$), donde el error relativo crece monótonamente con la amplitud (Hinrichsen, 2021; Beléndez et al., 2009). En ese margen, las aproximaciones modernas, desarrollos tipo Fourier y fórmulas basadas en el promedio aritmético-geométrico (AGM), reducen el sesgo respecto del valor exacto con un coste computacional bajo y con implementaciones aptas para pregrado (Black y Vel, 2023; BigAlabo, 2023). Además, presentaciones actuales que conectan el problema con las integrales elípticas y con formulaciones clásicas ayudan a situar el fenómeno dentro del programa de mecánica analítica (Boulanger y Buisseret, 2020).

En el plano experimental y didáctico, las prácticas encajan con una evidencia amplia: la instrumentación accesible (smartphones, fotopuertas/Arduino, análisis por vídeo) mejora la coherencia modelo-dato y habilita la exploración de regímenes más allá de la linealización (Li et al., 2020; Lukovic et al., 2021; Mathevet et al., 2022; Monteiro & Martí, 2022). El ecosistema de *apps* y recursos abiertos (p. ej., *phyphox* y guías de integración en cursos masivos) favorece la replicabilidad

con poco presupuesto y con cohortes numerosas (Carroll y Lincoln, 2020; Kaps et al., 2021; Staacks et al., 2022; Organtini y Tufino, 2022; Price y Organtini, 2022; Erol & Oğur, 2023; Coramik y İnanç, 2023; Monteiro, Stari, Cabeza, y Martí, 2020; Pili, 2021; Hart y Kuzyk, 2020). Desde el punto de vista metrológico, los factores que más inciden en la estimación del período T son la longitud efectiva (hasta el centro de masa), el control de la amplitud inicial y la técnica de liberación, y el cronometraje de múltiples oscilaciones para disminuir la incertidumbre aleatoria (Li et al., 2020; Lukovic et al., 2021; Mathevet et al., 2022). Estos controles son coherentes con tu procedimiento y explican la buena estabilidad de las estimaciones en ángulos pequeños, así como la deriva esperable cuando aumenta la amplitud. Respecto del papel del amortiguamiento, los datos y la bibliografía coinciden en que el arrastre del aire y el rozamiento en el pivote pueden sesgar ligeramente T si no se tratan explícitamente. La modelización con términos lineales y/o cuadráticos reproduce el decaimiento de amplitud observado y clarifica cuándo el ajuste con un único modelo introduce sesgo en la estimación (Lubarda y Lubarda, 2021; Salamon et al., 2020). La práctica de estimar decremento logarítmico y acotar ventanas de análisis, que tú adoptas, es consistente con estas recomendaciones.

En la comparación de aproximaciones del período a gran amplitud, las fórmulas AGM (BigAlabo, 2023) y los desarrollos por series (Black y Vel, 2023) muestran concordancia en un rango angular amplio y aportan *insight* conceptual distinto: AGM conecta con la teoría de integrales elípticas; Fourier permite ver la corrección sistemática a T_0 en potencias de la amplitud. Para el aula, ambas familias son útiles: AGM para cálculo rápido y series para

discutir aproximaciones asintóticas y su dominio de validez (Hinrichsen, 2021; Bender y Orszag, 1999). Como extensión formativa, el péndulo forzado introduce resonancia, histéresis y, en ciertos parámetros, dinámica compleja con rotaciones y transiciones bruscas, lo que brinda casos contrastivos frente al modelo lineal (Cumber, 2023; Pal et al., 2023). Estas actividades ayudan a delimitar el ámbito de validez de la linealización y a consolidar criterios de modelado experimental. A un nivel posterior, el péndulo invertido conecta de forma natural con el control moderno; aquí la bibliografía reciente, incluida la exploración con aprendizaje por refuerzo, abre un puente didáctico entre dinámica no lineal y control (Liu et al., 2024; Hernande et al., 2024). La síntesis está condicionada por la heterogeneidad de montajes (longitudes, sensores, tasas de muestreo) y por la restricción idiomática. La adopción de buenas prácticas de reporte (PRISMA 2020) y la valoración con SANRA mitigan estos riesgos al hacer explícitos criterios y flujo de selección (Baethge et al., 2019; Page et al., 2021a, 2021b). Un corolario didáctico claro es que el estudiantado aprende más cuando modelo y dato se contrastan de forma iterativa con una rúbrica de incertidumbre y con instrumentos que ellos mismos operan (Monteiro y Martí, 2022; Mathevet et al., 2022). Sugerimos cartografiar experimentalmente $\varepsilon(\theta_0)$ en paralelo con AGM y series usando cross-validation en varios montajes; caracterizar amortiguamiento mixto (viscoso + cuadrático) con protocolos de excitación controlada; y articular un bloque breve de péndulo forzado e invertido para que el estudiantado transite, con datos propios, desde la linealización hasta la no linealidad fuerte y el control (Black y Vel, 2023; BigAlabo, 2023; Lubarda y Lubarda, 2021; Pal et al., 2023; Price y Organtini, 2022; Staacks et al., 2022).

Conclusiones

La evidencia reunida delimita con claridad el rango de validez práctico de la aproximación de ángulos pequeños del péndulo simple: con $\theta_0 \leq 20^\circ$ el error relativo del período suele ser $< 1\%$ y en torno a 30° se aproxima al $1,7\%$; por encima de ese umbral conviene usar correcciones no lineales (series tipo Fourier o fórmulas basadas en AGM) o la expresión elíptica exacta, según el objetivo didáctico y la precisión requerida. Estos resultados respaldan que, en prácticas de pregrado, la linealización es pertinente si se explicitan sus límites y se acompaña de una discusión sobre el crecimiento de $\varepsilon(\theta_0)$, favoreciendo una comprensión progresiva desde el modelo ideal hasta el régimen no lineal. Desde el punto de vista operativo y pedagógico, la combinación de instrumentación accesible (smartphones, Arduino/fotopuertas) con protocolos metrológicos mínimos, medición de longitud efectiva hasta el centro de masa, control de amplitud inicial y cronometraje de múltiples oscilaciones, mejora la coherencia modelo-dato y reduce sesgos, incluso ante amortiguamiento leve. Integrar simulación con medición real facilita detectar no linealidades, discutir disipación y, como proyección curricular, introducir de forma gradual las variantes forzada e invertida, fortaleciendo competencias experimentales y de modelado en cursos iniciales.

Referencias Bibliográficas

- Baethge, C., Goldbeck-Wood, S., & Mertens, S. (2019). SANRA—A scale for the quality assessment of narrative review articles. *Research Integrity and Peer Review*, 4(1), 5. <https://doi.org/10.1186/s41073-019-0064-8>
- Beléndez, A., Rodes-Roca, J. J., Beléndez, T., & Hernández, A. (2009). Approximation for a large-angle simple pendulum period. *European Journal of Physics*, 30(2), L25–

- L28. <https://doi.org/10.1088/0143-0807/30/2/L03>
- Bender, C. M., & Orszag, S. A. (1999). *Advanced mathematical methods for scientists and engineers I: Asymptotic methods and perturbation theory*. Springer. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4757-3069-2>
- BigAlabo, A. (2023). Fifth-order AGM formula for the period of a large-angle pendulum. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 45, e20230014. <https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2023-0014>
- Black, B., & Vel, V. (2023). An analysis of the large-amplitude simple pendulum using Fourier series. *American Journal of Physics*, 91(10), 776–782. <https://doi.org/10.1119/5.0130943>
- Boulanger, N., & Buisseret, F. (2020). The formulations of classical mechanics with Foucault's pendulum. *Physics*, 2(4), 531–540. <https://doi.org/10.3390/physics2040030>
- Carroll, R., & Lincoln, J. (2020). Phyphox app in the physics classroom. *The Physics Teacher*, 58(8), 606–607. <https://doi.org/10.1119/10.0002393>
- Coramik, M., & İnanç, B. (2023). A physical pendulum experiment with LEGO, phyphox and Tracker. *Physics Education*, 58(5), 055014. <https://doi.org/10.1088/1361-6552/ace57d>
- Cumber, P. (2023). There is more than one way to force a pendulum. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 54(4), 579–613. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2039971>
- Erol, M., & Oğur, M. (2023). Teaching large-angle pendulum via Arduino-based STEM education material. *Physics Education*, 58(4), 045001. <https://doi.org/10.1088/1361-6552/accef4>
- Hart, M., & Kuzyk, M. G. (2020). Collecting data with a mobile phone: Studies of mechanical laws such as energy and momentum conservation. *American Journal of Physics*, 88(11), 948–957. <https://doi.org/10.1119/10.0001686>
- Hernandez, R., Garcia-Hernandez, R., & Jurado, F. (2024). Modeling, simulation, and control of a rotary inverted pendulum: A reinforcement learning-based control approach. *Modelling*, 5(4), 1824–1852. <https://doi.org/10.3390/modelling5040095>
- Hinrichsen, P. F. (2021). Review of approximate equations for the pendulum period. *European Journal of Physics*, 42(1), 015005. <https://doi.org/10.1088/1361-6404/abad10>
- Kaps, A., Splith, T., & Stallmach, F. (2021). Implementation of smartphone-based experimental exercises for physics courses at universities. *Physics Education*, 56(3), 035004. <https://doi.org/10.1088/1361-6552/abdee2>
- Li, D., Liu, L., & Zhou, S. (2020). Exploration of large pendulum oscillations and damping using a smartphone. *The Physics Teacher*, 58(9), 634–636. <https://doi.org/10.1119/10.0002729>
- Liu, X., Chen, X., Li, Z., & Huang, F. (2024). Balance controller design for inverted pendulum based on deep reinforcement learning. *Symmetry*, 16(9), 1227. <https://doi.org/10.3390/sym16091227>
- Lubarda, M. V., & Lubarda, V. A. (2021). An analysis of pendulum motion in the presence of quadratic and linear drag. *European Journal of Physics*, 42(5), 055014. <https://doi.org/10.1088/1361-6404/ac1446>
- Lukovic, M., Hoffmann, A., & Nussbaum, A. (2021). Inexpensive physical pendulum with Arduino. *The Physics Teacher*, 59(6), 432–436. <https://doi.org/10.1119/10.0006155>
- Mathevet, R., Lamrani, N., Martin, L., Ferrand, P., Castro, J.-P., Marchou, P., & Fabre, C. M. (2022). Quantitative analysis of a smartphone pendulum beyond linear approximation: A lockdown practical homework. *American Journal of Physics*, 90(5), 344–351. <https://doi.org/10.1119/10.0010073>
- Monteiro, M., & Martí, A. C. (2022). Resource Letter MDS-1: Mobile devices and sensors for physics teaching. *American Journal of Physics*, 90(5), 328–343. <https://doi.org/10.1119/5.0073317>

- Monteiro, M., Stari, C., Cabeza, C., & Martí, A. C. (2020). Experimental analysis of a compound pendulum with variable suspension point. *Physics Education*, 55(2), 023004. <https://doi.org/10.1088/1361-6552/ab606a>
- Organtini, G., & Tufino, E. (2022). Effectiveness of a laboratory course with Arduino and smartphones. *Education Sciences*, 12(12), 898. <https://doi.org/10.3390/educsci12120898>
- Page, M. J., McKenzie, J. E., Bossuyt, P. M., Boutron, I., Hoffmann, T. C., Mulrow, C. D., ... Moher, D. (2021a). The PRISMA 2020 statement: An updated guideline for reporting systematic reviews. *BMJ*, 372, n71. <https://doi.org/10.1136/bmj.n71>
- Page, M. J., McKenzie, J. E., Bossuyt, P. M., Boutron, I., Hoffmann, T. C., Mulrow, C. D., ... Moher, D. (2021b). PRISMA 2020 explanation and elaboration. *BMJ*, 372, n160. <https://doi.org/10.1136/bmj.n160>
- Pal, T. K., Ray, A., Nag Chowdhury, S., & Ghosh, D. (2023). Extreme rotational events in a forced-damped nonlinear pendulum. *Chaos*, 33(6), 063134. <https://doi.org/10.1063/5.0152699>
- Pili, U. B. (2021). Measurement of g using a pendulum and a smartphone proximity sensor. *The Physics Teacher*, 59(7), 584–586. (DOI disponible en el sitio del editor).
- Price, D. J., & Organtini, G. (2022). Smartphysicslab: A creative physics laboratory using Arduino and smartphones. *Journal of Physics: Conference Series*, 2297, 012013. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2297/1/012013>
- Salamon, R., Kamiński, H., & Fritzkowski, P. (2020). Estimation of parameters of various damping models in planar motion of a pendulum. *Meccanica*, 55, 1655–1677. <https://doi.org/10.1007/s11012-020-01197-z>
- Staacks, S., Dorsel, D., Hütz, S., Stallmach, F., Splith, T., Heinke, H., & Stampfer, C. (2022). Collaborative smartphone experiments for large audiences with phyphox. *European Journal of Physics*, 43(5), 055702. <https://doi.org/10.1088/1361-6404/ac7830>



Esta obra está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-No Comercial 4.0 Internacional. Copyright © Jorge Luis Puyol Cortez, Jenniffer Andrea Castillo García, Angie Julissa Caicedo Quintero, Thalya Brigith Bone Guagua, Atanacio Quintero Cimarrón y Wendy Marisabel Tapuyo Añapa.

